

No.2 解の構造

この回のゴール

- 連立一次方程式に解があるための条件を、ランクを使って述べられる。
- 解がただ1つか、無数にあるかを、ランクで判定できる。
- 解の自由度（パラメータの個数）が $n - \text{rank } A$ であることを説明できる。
- 文字を含む連立方程式を、ランクで場合分けして解ける。

■ 1. 3つのパターンをランクで見る

No.1 では、解がただ1つ・無数にある・解なし、の3つのパターンを見た。それぞれ、最後の拡大係数行列を並べてみよう（未知数は3個）。

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)}_{\text{解がただ1つ}} \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)}_{\text{解が無数}} \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)}_{\text{解なし}}$$

係数行列 A と拡大係数行列 $(A | \mathbf{b})$ のランクを比べると、

- 解がただ1つ： $\text{rank } A = 3, \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3$.
- 解が無数： $\text{rank } A = 2, \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2$.
- 解なし： $\text{rank } A = 2, \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3$.

解なしのときだけ、 $\mathbf{b}$ を付け加えたことでランクが増えている。増えた行は $(0 \ 0 \ 0 | 1)$ 、つまり「 $0 = 1$ 」という矛盾した式である。

■ 2. 解の存在と一意性

定理 1 解の存在条件

A を $m \times n$ 行列とする。連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について、

$$\text{解をもつ} \iff \text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}).$$

【証明】 A を簡約階段行列 R に変形する行基本変形を、拡大係数行列 $(A | \mathbf{b})$ に行うと $(R | \mathbf{c})$ になる。 $r = \text{rank } A$ とすると、 R の第 $r+1$ 行以降は零行なので、 $(R | \mathbf{c})$ の第 $r+1$ 行以降は

$$(0 \ \cdots \ 0 | c_{r+1}), \dots, (0 \ \cdots \ 0 | c_m)$$

の形をしている。

$c_{r+1}, \dots, c_m$ がすべて 0 のとき：これらの行は $0 = 0$ を表すだけで、 $\text{rank}(A | \mathbf{b}) = r$ 。残りの r 本の式は、主成分の未知数について解けるので、解が存在する。

どれかが 0 でないとき：その行は $0 = c_i$ ($\neq 0$) という矛盾を表すので、解は存在しない。このときさらに行基本変形をすると、第 $r+1$ 行以降には零行でない行がちょうど1本残るので $\text{rank}(A | \mathbf{b}) = r+1$ 。

以上より、解をもつことと $\text{rank}(A | \mathbf{b}) = r$ は同値である。□

定理 2 解の個数

A を $m \times n$ 行列, $r = \text{rank } A$ とし, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつとする.

- (1) 解は, $n - r$ 個の任意の実数 (パラメータ) を用いて表される.
- (2) 特に, 解がただ 1 つ $\iff r = n$.

【証明】簡約階段行列の主成分は r 個なので, 主成分のある列は r 本, 主成分のない列は $n - r$ 本ある. No.1 で見たように, 主成分のない列の未知数は自由に選べ, 主成分のある列の未知数はそれらで表される. よって解は $n - r$ 個のパラメータで表される. $n - r = 0$ のときに限り自由な文字がなく, 解はただ 1 つ. □
 $n - \text{rank } A$ を, 解の**自由度**ということがある.

判定のまとめ

未知数が n 個の連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ について,

ランクの関係	解
$\text{rank } A < \text{rank}(A \mathbf{b})$	解なし
$\text{rank } A = \text{rank}(A \mathbf{b}) = n$	ただ 1 つ
$\text{rank } A = \text{rank}(A \mathbf{b}) < n$	無数 ($n - \text{rank } A$ 個のパラメータ)

なお, $(A | \mathbf{b})$ は A に列を 1 本足しただけなので, いつでも $\text{rank } A \leq \text{rank}(A | \mathbf{b}) \leq \text{rank } A + 1$ である.

コラム：自由度は「次元」の予告

例えば未知数が 3 個で $\text{rank } A = 2$ なら, 解は 1 個のパラメータ t で表され, 図形としては**直線** (1 次元) になる. $\text{rank } A = 1$ なら 2 個のパラメータで**平面** (2 次元). 「 $n - \text{rank } A$ が解の集まりの次元になる」という見方は, 第 5 章の**次元定理**で正確に定式化される.

定理 3 式が未知数より少ないとき

A が $m \times n$ 行列で $m < n$ (式の本数が未知数の個数より少ない) とする. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつなら, 解は無数にある.

【証明】No.5 定理 1 より $\text{rank } A \leq m < n$ なので, 定理 2 より解はただ 1 つではない. □

■ 3. 文字を含む連立方程式

例題 1

次の連立方程式が、(i) ただ1つの解をもつ、(ii) 無数の解をもつ、(iii) 解をもたない、のはそれぞれどのようなときか。また、解をもつときはその解を求めよ。

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$$

【解答】

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & b \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}, \textcircled{3}-\textcircled{1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & b-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-3 \end{array} \right).$$

$a \neq 5$ のとき: $\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3$ で、ただ1つの解をもつ。第3式から $z = \frac{b-3}{a-5}$ 。第2式から $y = 1 - 2z$ 、第1式から $x = 1 - y - z = z$ 。よって

$$x = \frac{b-3}{a-5}, \quad y = 1 - \frac{2(b-3)}{a-5}, \quad z = \frac{b-3}{a-5}.$$

$a = 5, b = 3$ のとき: 第3行が零行になり、 $\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2 < 3$ 。解は無数。 $z = t$ とおくと $y = 1 - 2t$, $x = 1 - y - z = t$ なので $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意)。

$a = 5, b \neq 3$ のとき: 第3行が $(0 \ 0 \ 0 | b-3)$ で $b-3 \neq 0$ 。 $\text{rank } A = 2 < 3 = \text{rank}(A | \mathbf{b})$ なので解なし。

以上をまとめると、(i) $a \neq 5$, (ii) $a = 5$ かつ $b = 3$, (iii) $a = 5$ かつ $b \neq 3$ 。

注意

場合分けの境目は「 $a-5$ で割れるかどうか」で決まる。 $a=5$ のときは、さらに右辺の $b-3$ が0かどうかで、無数か解なしかが分かれる。

■ 練習問題

1. No.1 練習問題1の(1)~(3)について、 $\text{rank } A$ と $\text{rank}(A | \mathbf{b})$ を答え、定理1・定理2と結果が合っていることを確かめよ。

2. 連立方程式
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = k \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$
 が解をもつような k の値を求め、そのときの解を求めよ。

3. 連立方程式
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$
 の解を、 a の値で場合分けして求めよ。(係数行列のランクは No.5 例題1で求めている。)

4. A を 3 次正方行列とし, $\text{rank } A = 3$ とする. どんな $\mathbf{b}$ に対しても $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がただ 1 つの解をもつことを, ランクを用いて示せ.
5. (考えてみよう) 式が 3 本, 未知数が 2 個で, ただ 1 つの解をもつ連立方程式の例を作れ. このとき $\text{rank } A$, $\text{rank}(A \mid \mathbf{b})$ はいくつか. 図形的にはどういう状況か.

■ 練習問題の解答

1. (1) $\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3 = n$ で、解はただ 1 つ. (2) $\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2 < 3$ で、解は $3 - 2 = 1$ 個のパラメータで表される. (3) $\text{rank } A = 2$, $\text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3$ で、解なし.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & k \\ 3 & 5 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 2, \textcircled{3}-\textcircled{1} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & k-2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3-k \end{pmatrix}.$$

$\text{rank } A = 2$ なので、解をもつ条件は $\text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2$, つまり $k = 3$. このとき第 2 式は $-y + 3z = 1$. $z = t$ とおくと $y = 3t - 1$, $x = 1 - 2y + z = 3 - 5t$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意}).$$

3. No.5 例題 1 と同じ変形を拡大係数行列に行う.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & 1 \\ a & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}, \textcircled{3}-\textcircled{1} \times a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & | & 1-a \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & | & 1-a \end{pmatrix}.$$

$a \neq 1, -2$ のとき: $\text{rank } A = 3$ でただ 1 つの解. 第 2 式を $a-1$ で割って $y = z$. 第 3 式を $-(a-1)$ で割って $(a+2)z = 1$, $z = \frac{1}{a+2}$. 第 1 式から $x = 1 - y - az = 1 - (a+1)z = \frac{1}{a+2}$. よって $x = y = z = \frac{1}{a+2}$.

$a = 1$ のとき: 第 2, 3 行が零行で、方程式は $x + y + z = 1$ だけ. $\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 1$, パラメータは $3 - 1 = 2$ 個. $y = s$, $z = t$ とおいて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意).

$a = -2$ のとき: 第 3 行は $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 3)$ で、 $\text{rank } A = 2 < 3 = \text{rank}(A | \mathbf{b})$. 解なし.

4. $(A | \mathbf{b})$ は 3×4 行列なので $\text{rank}(A | \mathbf{b}) \leq 3$. 一方 $\text{rank}(A | \mathbf{b}) \geq \text{rank } A = 3$. よって $\text{rank}(A | \mathbf{b}) = 3 = \text{rank } A$ で、定理 1 より解をもつ. さらに $\text{rank } A = 3 = n$ なので、定理 2 より解はただ 1 つ.

5. 例えば $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ (解は $x = y = 1$). $\text{rank } A = \text{rank}(A | \mathbf{b}) = 2$. 図形的には、平面上の 3 本の

直線が 1 点 $(1, 1)$ を共有している状況. 3 本目の式は、1 本目と 2 本目から作れる $(\frac{3}{2} \times \textcircled{1} + \frac{1}{2} \times \textcircled{2})$ ので、実質的な式は 2 本である.